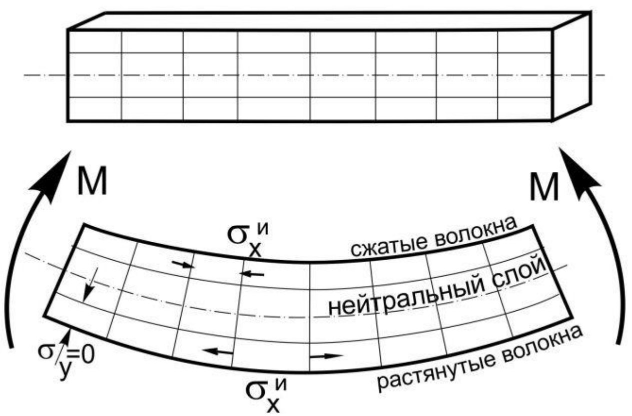
Лекция 7

Плоский поперечный изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Нормальные напряжения при изгибе. Условие прочности при изгибе.



ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Изгиб – вид деформации, при котором происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса.

Изгиб плоский (прямой изгиб) – случай изгиба, при котором внешние силы лежат в главной плоскости инерции и являются перпендикулярными к геометрическим осям. Если сечение имеет ось симметрии, то внешние силы располагаются в плоскости симметрии.

Главная плоскость инерции – плоскость, проходящая через геометрическую ось бруса и главную ось инерции (главные оси инерции - три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела)

Изгиб чистый – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – изгибающий момент Mz или My.

Изгиб поперечный – случай изгиба, при котором в сечениях бруса наряду с изгибающим моментом M действует и поперечная сила Q.

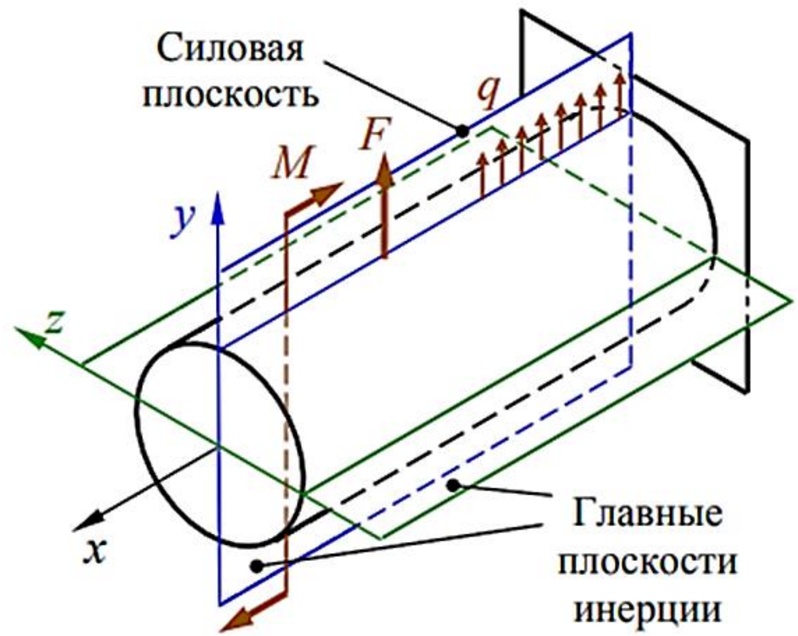
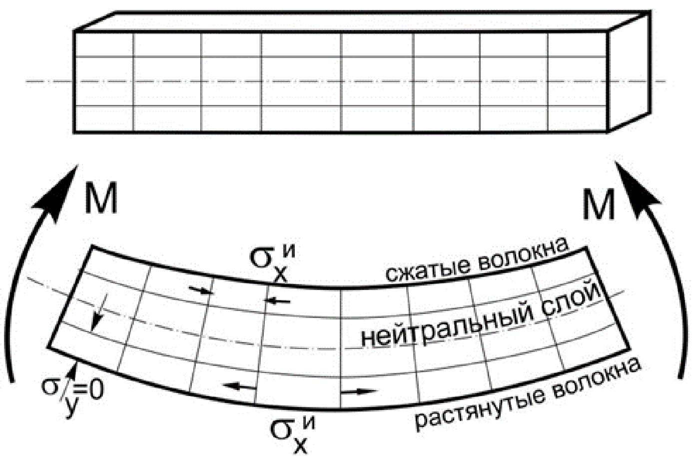


Схема взаимного расположения силовой плоскости и плоскостей инерции

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что часть волокон укорачивается, другая часть волокон удлиняется.

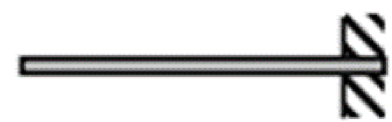


Нейтральный слой – слой волокон, в котором нормальные напряжения отсутствуют.

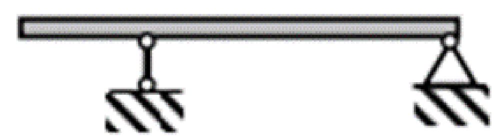
Нейтральная ось – след пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения.

Балка – конструктивный элемент, с прямолинейной геометрической осью, обычно в виде бруса, работающий главным образом на изгиб.

Балка простая – однопролетная балка без консолей, лежащая на двух опорах: шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной. Расстояние между опорами называют пролетом.



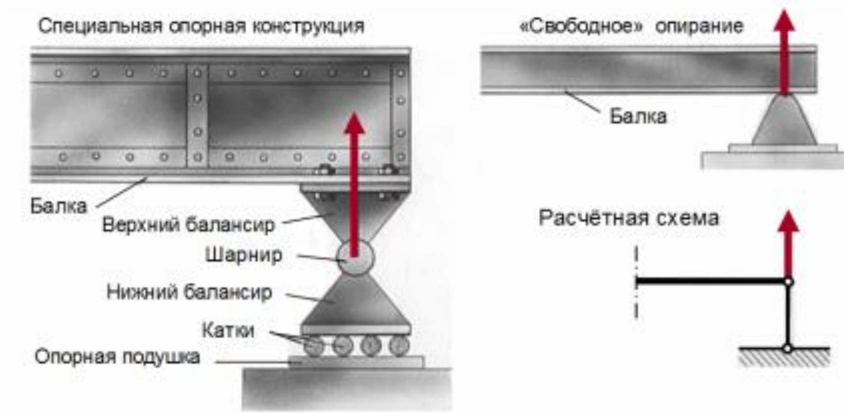
Консоль – балка с одним защемленным концом или часть балки, свешивающаяся за опору.



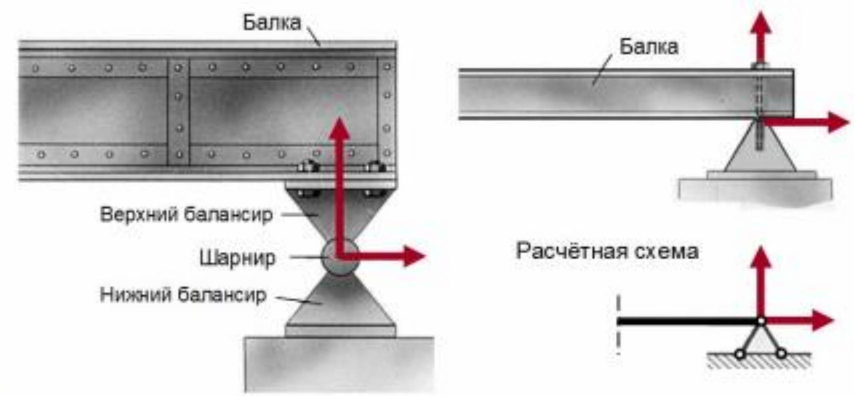
ОПОРЫ И ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ

Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам:

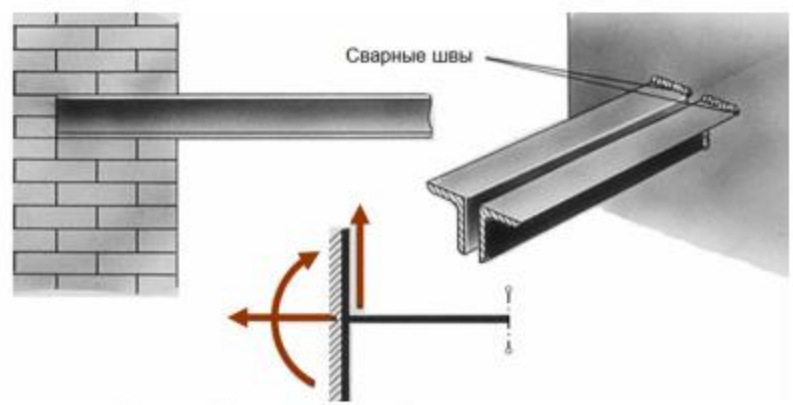
Шарнирно-подвижная опора допускает поворот опорного сечения и перемещение его в одном направлении. Опорная реакция перпендикулярно к плоскости опирания катков.



Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция имеет две составляющие: горизонтальную и вертикальную

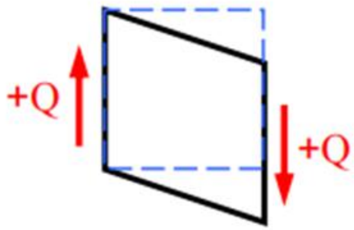


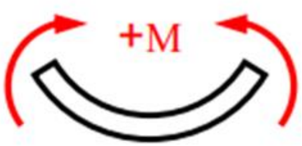
Жесткая заделка (защемление) не допускает поворота опорного сечения и любых его перемещений. Имеет три реакции: горизонтальную и вертикальную составляющие, а также опорный момент.



ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Из шести внутренних усилий, действующих в сечении в общем случае, при плоском поперечном изгибе только два не равны нулю: Qy и Mz.





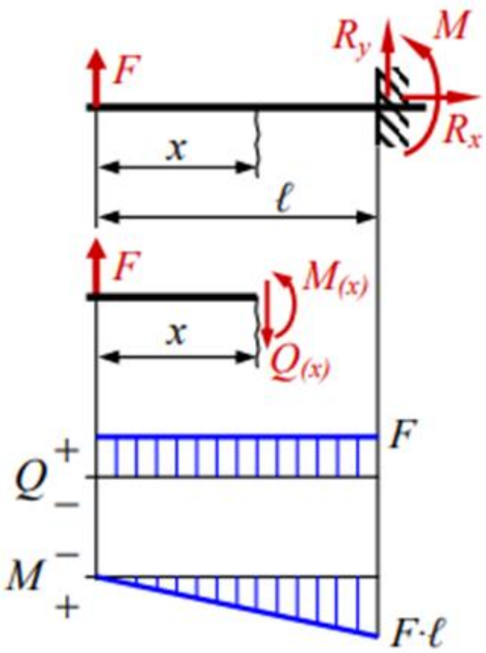
Правила знаков устанавливают не по направлению действию сил, как в теоретической механике, а по виду деформации.

Поперечная сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по ходу часовой стрелки (положительная поперечная сила вызывает положительное касательное напряжение).

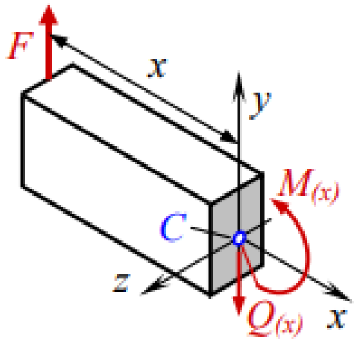
Изгибающий момент M в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхней части бруса, а растянутая область изгибаемого элемента – в нижней.
Часто эпюры изгибающего момента строят со стороны сжатой зоны элемента, но удобнее – со стороны растянутой

Примеры:

1. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой.



Система координат помещена в центр тяжести *С* рассматриваемого сечения



Решение.

Опора (защемление) накладывает три связи, обусловливающие возникновение трех реакций: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции Rx и Ry, а также опорный момент М. В целях упрощения расчета внутренние усилия определяем со свободного конца.

Используем метод сечений:

- рассекаем балку на две части;

- отбрасываем одну из частей;

- заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями (положительными в соответствие с установленными правилами знаков)

- составляем уравнения равновесия, из которых находим внутренние усилия.

I участок: $0 \le x \le \ell$.

$$\sum y = 0; \quad F - Q_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad Q_{(x)} = F;$$

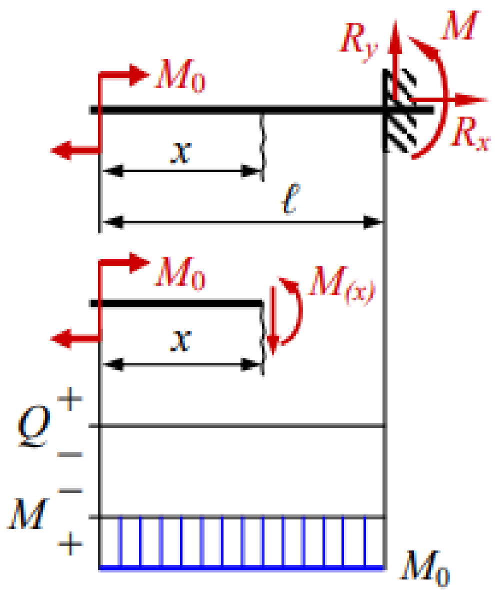
$$\sum M_z = 0; \quad -F \cdot x + M_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = F \cdot x.$$

Поперечная сила $Q_{(x)}$ – функция от абсциссы x – величина постоянная.

Изгибающий момент $M_{(x)}$ – линейная функция от абсциссы x – описывается уравнением прямой; для ее построения находим значение функции в двух точках – в начале и конце участка:

$M_{x=0} = 0; \qquad M_{x=\ell} = F \cdot \ell.$ Строим эпюры Q и M.

2. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенным моментом.

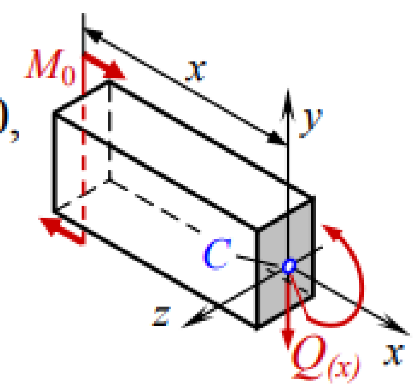


Решение. Внутренние усилия в произвольном сечении I участка: $0 \le x \le \ell$.

$$\sum y = 0; \quad Q_{(x)} = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -M_0 + M_{(x)} = 0,$$

откуда $\quad M_{(x)} = M_0.$



Поперечная сила $Q_{(x)}$ отсутствует, изгибающий момент $M_{(x)}$ – величина постоянная; имеет место чистый изгиб

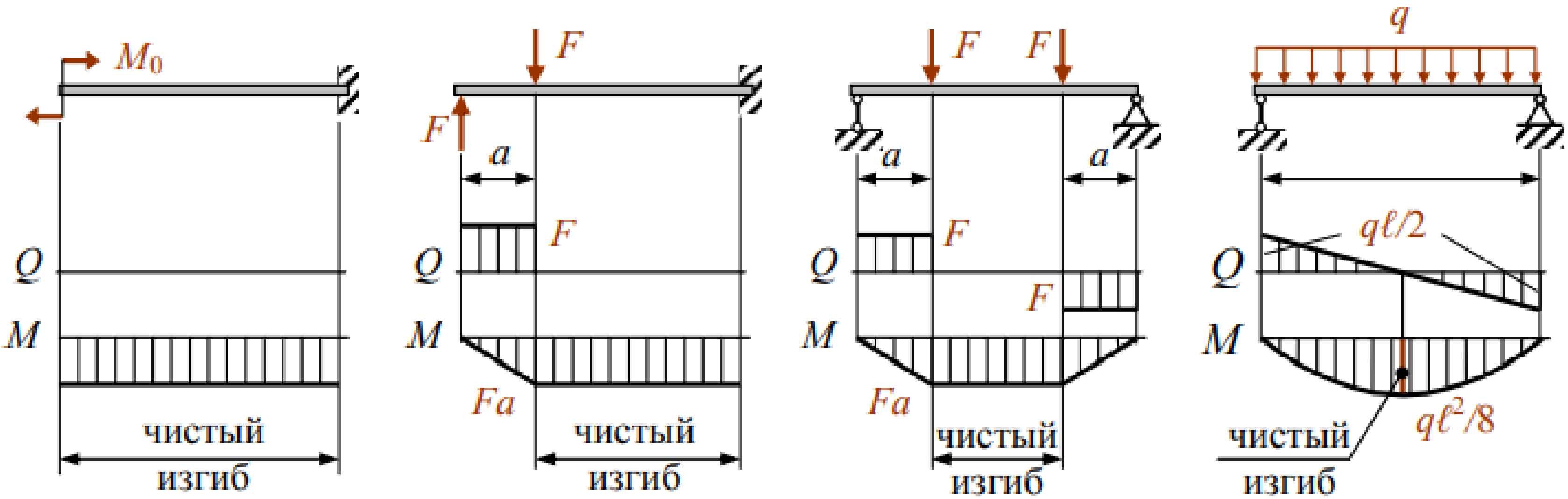
Строим эпюры Q и M.

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим простейший случай изгиба – чистый изгиб, при котором в поперечных сечениях бруса действует только одно внутреннее усилие – изгибающий момент. Например, в условиях чистого изгиба работают участки балки, на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила отсутствует (dM/dx = 0).

При расчете балки на изгиб будем считать справедливыми принятые ранее гипотезы, из которых выделим следующие:

- **гипотеза плоских сечений (Бернулли): поперечные сечения бруса плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии;**
- **гипотеза постоянства напряжений по ширине бруса;**
- **гипотеза отсутствия боковых давлений: боковые волокна бруса не давят друг на друга.**



Схемы нагружения, при которых в сечениях возникает чистый изгиб

Геометрический анализ

Двумя сечениями *ad* и *bc* на расстоянии dx выделим малый элемент (рис. а, б) и рассмотрим его деформацию (рис. в).

Длина отрезка нейтрального слоя $dx = \rho \cdot d\varphi.$

Волокно нейтрального слоя не деформируется ε = 0, σ = 0.

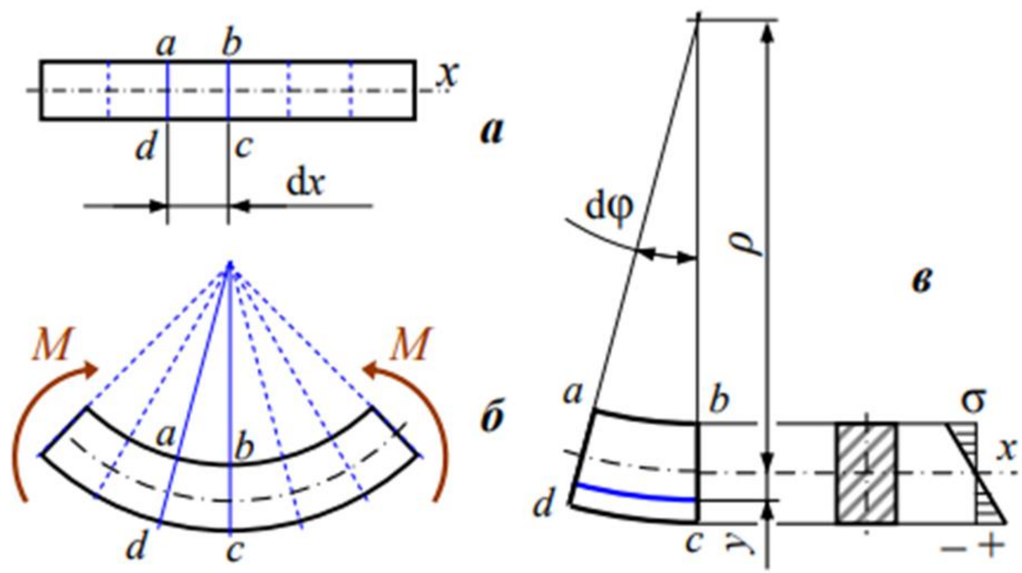
Любое другое волокно, находящееся на расстоянии *y* изменит свою длину и станет равным $(\rho + y)d\varphi.$

Его относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi}$$

После преобразования получим

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}.$$



Деформация волокон пропорциональна их расстоянию до нейтрального слоя.

Деформация балки при изгибе – кривизна ее геометрической оси.

Физический анализ

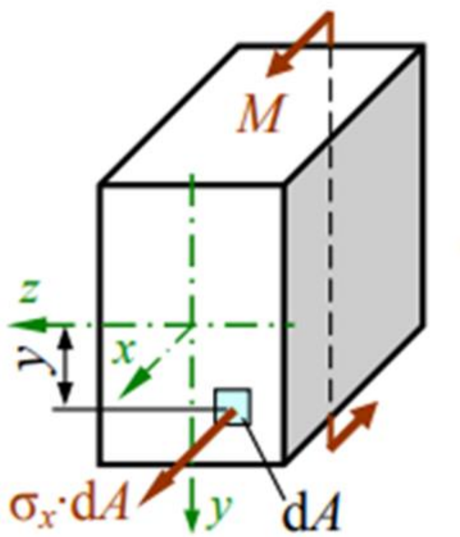
В общем случае нагружения продольная деформация по закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

однако в силу гипотезы отсутствия боковых давлений $\sigma_z = 0$ и $\sigma_y = 0$ **,**
то есть волокна бруса испытывают только деформацию растяжения.

Имеет место линейное напряженное состояние $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$

Статический анализ



Внутренние усилия в сечении

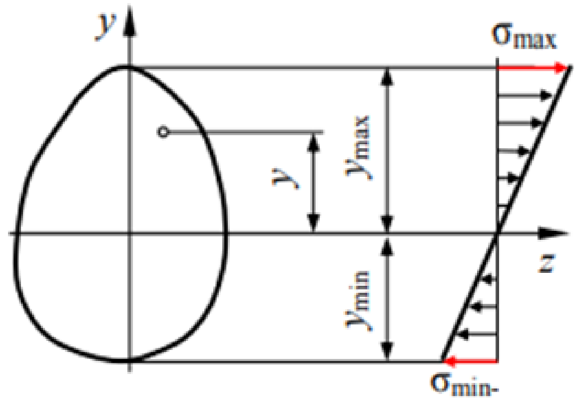
Элементарное усилие - $\sigma_x \cdot dA$

Элементарный момент - $y(\sigma_x \cdot dA)$

Момент во всем сечении

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

Уравнение Навье $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$.



Следствия из формулы Навье:

- центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил;
- напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки;
- напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой;
- наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя

Закон Гука при изгибе

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}.}$$

$E \cdot I_z$ - жесткость сечения при изгибе

Следствия из закона Гука:

- момент инерции характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы его поперечного сечения; чем больше значение момент инерции при заданной величине *M*, тем большим окажется радиус кривизны нейтрального слоя бруса, то есть брус искривляется меньше;

- модуль упругости характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от его материала.

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Максимальные напряжения в опасном (где действует M_{max}) сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max}$$

Принимая отношение $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$,

получим условие прочности при изгибе

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma],}$$

Осевой момент сопротивления сечения

Для прямоугольника $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Для круга $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0{,}1 D^3$.

Для кольца $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \left(1 - c^4\right) \approx 0{,}1 D^3 \left(1 - c^4\right)$,

$\text{c} = \frac{d}{D}$ − коэффициент пустотелости, d − диаметр полого сечения

Используя условие прочности выполняют три вида расчетов:

1. **Поверочный**

Вычисляют σ_{max} , а затем вычисляют перегрузку или недогрузку в процентах по отношению к допускаемому напряжению, либо находят коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности для хрупких.

2. **Проектный.** Из условия прочности находят необходимое значение момента сопротивления. Размеры нестандартных сечений (круг, прямоугольник…) округляют в соответствие с ГОСТом. Стандартные прокатные профили выбирают из таблиц сортамента. Если размер сечения выбран меньше требуемого, то выполняют поверочный расчет. Перегрузка более 5 % не допускается.

3. **Определение допускаемой нагрузки.** При известных характеристиках прочности материала и заданном размере поперечного сечения определяют допускаемое внутреннее усилие (изгибающий момент), а затем, исходя из схемы нагружения, находят допускаемые внешние силовые факторы. Если сечение несимметрично относительно оси z (трапецеидальное, треугольное, тавровое…), а также при использовании хрупкого материала (чугун, керамика…), условие прочности проверяют отдельно по максимальным и минимальным напряжениям, используя формулу

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y .$$